Beitrag zur Statik homogener Kreisplatten und Kreismembranen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Martin Luther-Universität
Halle-Wittenberg

vorgelegt von

Werner Lüddecke
aus Gnadau.

Halle/S.

1937

Druck: BUCHDRUCKEREI JOH. MOLTZEN, LEIPZIG O 5
Wurzner Straße 9

Referent: Prof. Dr. H. W. E. Jung.

Korreferent: Prof. Dr. H. Brandt.

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juni 1936.

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinem Bruder gewidmet!

Inhalt.

Seite

1. Einleitung 5

2. Erläuterung des Verfahrens 9
   Integralsatz Seite 9
   Konzentrischer Kreisring als Lastfeld Seite 10

3. Kreismembran 15
   Konzentrischer Kreissektor als Lastfeld Seite 15
   Spezialisierungen Seite 22
   Exzentrischer Kreissektor als Lastfeld Seite 24

4. Kreisplatte 29
   Konzentrischer Kreissektor als Lastfeld Seite 29
   Spezialisierungen Seite 33

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548112_0077

1. Einleitung.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einigen statischen Belastungsproblemen kreisförmiger Platten[1]) und Membranen. Methodisch soll dabei die Platte wegen ihrer weitaus größeren praktischen Bedeutung im Vordergrund stehen, während die Membran wegen ihrer einfacheren Behandlung in rechnerischer Hinsicht einen Vorrang einnehmen wird.

Die Durchbiegung einer Kreisplatte unter dem Einfluß spezieller Belastungen ist mit den verschiedensten Methoden und Ansätzen behandelt worden. Poisson gab in seiner Abhandlung[2]) vom Jahre 1828 die Durchbiegung für die am Rande fest eingespannte und für die frei aufliegende Platte unter einer gleichmäßigen Oberflächenlast und unter einer Einzellast im Mittelpunkt an. Saint-Venant[3]) behandelte den Fall, daß die Gesamtlast über den Umfang eines Kreises vom Radius $b < a$ ($a =$ Plattenradius) gleichförmig verteilt ist. A. Clebsch[4]) löste das Problem der exzentrisch angreifenden Einzellast bei eingespanntem Rand in Reihenform, und A. Föppl[5]) übertrug das Ergebnis auf den Fall des frei aufliegenden Randes. Lösungen in geschlossener Form für die exzentrische Einzellast stellten her: I. H. Michel[6]), E. Melan[7]), W. Flügge[8]), sowie in neuester Zeit bei gelenkig gelagertem Plattenrand E. Reißner[9]). A. und L. Föppl[10]) haben den Belastungsfall betrachtet, daß die Platte konzentrisch von $r = 0$ bis $r = b$ eine gleichförmig verteilte Last p_1 und von $r = b$ bis $r = a$ eine Last p_2 pro Flächeneinheit trägt.

---

[1]) Platten im üblichen Sinne: homogen, hinreichend dünn und ihre Durchbiegungen von kleinerer Größenordnung als ihre Dicke.

[2]) Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides. Par. Mém. de l'Acad., Bd. 8, 1829.

[3]) Clebsch-Ausgabe, note du § 45. Vgl. auch Love-Timpe § 314.

[4]) Theorie der Elastizität fester Körper, S. 327, Leipzig 1862.

[5]) Berichte der Bayr. Akad. d. W., S. 155, 1912.

[6]) Proc. Math. Soc. London, Bd. 34, S. 223, 1902.

[7]) Der Eisenbau, Bd. 11, S. 190, Leipzig 1920.

[8]) Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten mit Hilfe von krummlinigen Koordinaten, S. 43, Berlin 1928.

[9]) Math. Annalen, Bd. 111, S. 777, 1935.

[10]) Drang und Zwang, Bd. 1, § 27, S. 178.

Die Lösung des Biegungsproblems für den allgemeinen Fall, daß die Last über ein beliebiges Teilgebiet der Plattenoberfläche verteilt ist, ist nun zwar prinzipiell durch die Lösung für die exzentrische Einzellast gegeben, da ja diese als die dem Biegungsproblem zugeordnete Einfluß bzw. Greensche Funktion die Lösung des allgemeinen Problems auf einen Integrationsprozeß zu reduzieren gestattet [11]); allein schon bei verhältnismäßig einfachen Lastverteilungen bereitet die tatsächliche Durchführung dieser Integration sehr erhebliche Schwierigkeiten.

Eine Anzahl von Biegungsproblemen komplizierter Art [12]) ließ bisher nur eine Lösung in Form von unendlichen Reihen zu. Das angewandte übliche Verfahren der Reihenentwicklung des die Last darstellenden Störungsgliedes der Differentialgleichung führt in den meisten Fällen zu Lösungsreihen, bei denen die notwendige Untersuchung auf Konvergenz und auf Zulässigkeit der bei Einführng in die Differentialgleichung vorzunehmenden gliedweisen Differentiationen nicht immer einfach ist.

Wenngleich für den praktischen Standpunkt des Ingenieurs Lösungen in Reihenform (vorausgesetzt, daß sie schnell genug konvergieren) zur numerischen Auswertung ausreichend sind, so beansprucht doch die Frage, bei welchen Belastungsfällen die Lösung grundsätzlich durch elementare Funktionen zur Darstellung gebracht werden kann, zum mindesten in theoretischer Hinsicht Interesse.

Einen Belastungsfall sehr allgemeiner Art, bei dem die Last über einen exzentrischen Kreisring auf der am Rande fest eingespannten Platte gleichmäßig verteilt ist, hat H. Schmidt [13]) behandelt und durch Benutzung komplexer Kurvenintegrale unter Vermeidung von unendlichen Reihen gelöst. Hier wird die Lastverteilung durch ein komplexes Kurvenintegral dargestellt, und das Biegungsproblem nach dem linearen Superpositionsprinzip gelöst.

Es liegt nun nahe, den von H. Schmidt aufgezeigten Weg zur Lösung statischer Kreisplattenprobleme durch elementare Funktionen auch bei der Behandlung anderer wichtiger Belastungsfälle zu beschreiten. Besonders interessant muß dabei aus sogleich anzugebenden Gründen der Fall erscheinen, in dem das Lastfeld (p_0; pro Flächeneinheit) durch einen exzentrischen Kreissektor dargestellt wird. (Fig. 1). Der Nachweis, daß dieses Biegungsproblem für die am Rand fest eingespannte Kreisplatte (ebenso für die Kreismembran) eine Lösung der genannten Art zuläßt, wird in den beiden

---

[11]) Vgl. z. B. Nadai, Elastische Platten, S. 194, Berlin 1925. G. Zieher. Beitrag zur Berechnung von Platten, Diss an d. T. H. Stuttgart, 1931. Vgl. auch Fußnote auf S. 5 der vorliegenden Arbeit.

[12]) Love, Theory of Elasticity, 4. Aufl., S. 491.

[13]) Ing. Archiv, 1, S. 147, 1930.

letzten Teilen der vorliegenden Arbeit erbracht. Es sei an dieser Stelle hervorgehoben, daß die Beschränkung auf den Fall des eingespannten Plattenrandes unwesentlich ist, wie H. Schmidt kürzlich am Beispiel der gelenkig gestützten Kreisplatte gezeigt hat [14]). Dadurch erhalten die in dieser Arbeit gewonnenen Ergebnisse einen noch größeren Grad von Allgemeingültigkeit.

Die oben gestellte Frage, wie weitgehend sich Biegungsprobleme mit komplizierten Lastverteilungen durch elementare Funktionen lösen lassen, kann nun auf Grund der soeben angeführten Resultate dahingehend beantwortet werden, daß grundsätzlich die Durchbiegung einer Kreisplatte (ebenso einer Kreismembran) bei einem beliebig geradlinig berandetem gleichförmigen Lastfeld unter Vermeidung von Reihen angegeben werden kann [15]).

Dabei sind folgende drei Fälle zugelassen:

1. Die Begrenzung des Lastfeldes besteht nur aus inneren Punkten der Plattenoberfläche.
2. Einige oder auch alle Eckpunkte des begrenzenden Polygons liegen auf dem Plattenrande.
3. An Stelle von einer oder auch mehrerer Polygonseiten treten Teile des Plattenrandes.

Um diese Behauptung zu begründen, ist lediglich zu zeigen, daß sich jedes derartige Lastfeld durch Superposition exzentrischer Sektorlasten erzeugen läßt. Zunächst kann nun die Fläche eines geschlossenen Polygons in Dreiecksflächen zerlegt werden (Fig. 2), so daß die Betrachtungen auf den Fall eines dreiekig berandeten Lastfeldes beschränkt werden dürfen.

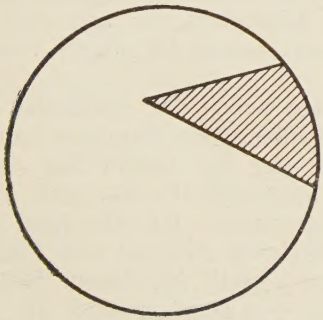

Fig. 1

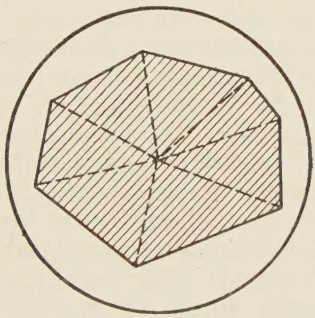

Fig. 2

[14]) Math. Annalen, 112, S. 322, 1936.

[15]) Vgl. H. Schmidt, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 11, S. 426, 1931.

Eine Dreiecksfläche kann aber durch algebraische Superposition von drei exzentrischen Kreissektoren erhalten werden, da gemäß Fig. 3

$$\mathfrak{S}(ABC) - \mathfrak{S}(ADE) + \mathfrak{S}(CFE) = \mathfrak{D}(DBF)$$

gilt. Die doppelt schraffierten Flächen heben sich dabei auf und das darzustellende einfach schraffierte Dreieck bleibt bestehen.

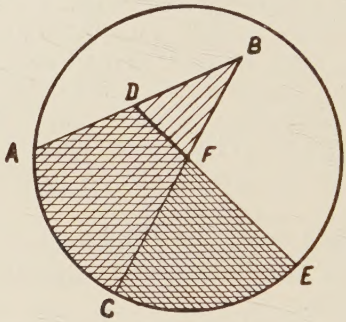

Fig. 3

Um also die der Polygonfläche als Lastfeld entsprechende Durchbiegung der Platte zu erhalten, sind im Prinzip Durchbiegungen, die sektorförmigen Lastfeldern entsprechen, nach dem linearen Superpositionsprinzip zu superponieren.

Aus einer Sektorlast kann weiter durch Grenzübergang eine gerade Linienlast erhalten werden, die von einem inneren Punkt der Plattenoberfläche zu einem Randpunkt reicht. Eine Linienlast längs eines beliebigen Geradenstückes, dessen Anfangs- und Endpunkt innere Punkte sind, stellt sich dann als Differenz zweier Linienlasten der erwähnten Art dar. Speziell kann also auch die Durchbiegung unter dem Einfluß einer konstanten Linienlast, die über ein beliebiges Polygon (offen oder geschlossen) verteilt ist, durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

N. M. Basu und H. M. Sen Gupta haben den Spezialfall der längs eines Plattenhalbmessers angreifenden gleichförmigen Linienlast betrachtet und die Durchbiegung der am Rande fest eingespannten Kreisplatte in Reihenform angegeben [16]). Sie sind dabei von dem allgemeineren Problem ausgegangen, daß die Last (pro Flächeneinheit) proportional zum umgekehrten Abstand vom Plattenmittelpunkt über einen Kreisringsektor verteilt ist, dessen Begrenzungen durch $r = b$, $r = c$ und $\varphi = \pm \alpha$ gegeben sind. In dem Plattenteilgebiet $c < r < b$, das den belasteten Ringsektor enthält, wird das Störungsglied der inhomogenen Differentialgleichung in

[16]) On the Bending of a thin elastic circular Plate due to certain Distributions of Load, The Tôhoku Math. Journal, Bd. 33, S. 280, 1931.

eine trigonometrische Reihe entwickelt, während in den lastfreien Gebieten $0 \leqq r < c$ und $c < r < a$ (a = Plattenradius) die homogene Gleichung gilt. Für die Lösung der Differentialgleichung wird ein Ansatz in Reihenform gemacht. Anwendung des linearen Superpositionsprinzips führt nach Erfüllung gewisser Übergangsbedingungen durch passende Wahl der frei zur Verfügung stehenden Integrationskonstanten zum Ziel. Die Sinnhaftigkeit der auf diesem Wege in Form von drei unendlichen Reihen (den drei Plattenteilgebieten entsprechend) gewonnenen formalen Lösung des Problems wird durch Konvergenzuntersuchung der Reihen und ihrer gliedweisen partiellen Ableitungen festgestellt. Die Lösung des oben genannten speziellen Problems wird schließlich durch einen Grenzprozeß erhalten. Weiterhin wird der Fall betrachtet, daß die Last proportional zum umgekehrten Abstand vom Plattenmittelpunkt über den konzentrischen Kreisring $c < r < b$ verteilt ist. Beide Belastungsfälle ergeben sich auch in der vorliegenden Arbeit durch Spezialisierung allgemeinerer Lastverteilungen. Die ihnen entsprechenden Durchbiegungen der Platte (und Membran) lassen sich demnach durch elementare Funktionen zur Darstellung bringen [17]).

2. Erläuterung des Verfahrens.

Die Tatsache, daß eine große Zahl statischer Belastungsprobleme bei Platten (und Membranen) ohne Einführung irgendwelcher Reihenentwicklungen erfolgreich behandelt werden kann, beruht auf der Anwendung des folgenden Integralsatzes [18]): $F(z)$ sei eine meromorphe Funktion der komplexen Veränderlichen z mit den endlich vielen Polen $z = z_\sigma$, $(\sigma = 1, 2, \cdots s)$ von der jeweiligen Ordnung l_σ. Den Polen z_σ mögen die Laurentschen Entwicklungen von $F(z)$ entsprechen

$$F(z) = \sum_{\lambda=1}^{l_\sigma} \frac{A_\lambda^{(\sigma)}}{(z - z_\sigma)^\lambda} + \sum_{\varkappa=0}^{\infty} B_\varkappa^{(\sigma)} (z - z_\sigma)^\varkappa$$

Dann gilt

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{(c)} e^{\tau z} F(z)\, dz = \begin{cases} \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{\lambda=1}^{l_\sigma} e^{\tau z_\sigma} A_\lambda^{(\sigma)} \frac{\tau^{\lambda-1}}{(\lambda-1)!} & \text{für } \tau > 0 \\ 0 & \text{„ } \tau < 0 \end{cases}$$

[17]) Vgl. S. 17 und 25.

[18]) H. Schmidt, ZS. f.. Phys. 39, S. 474, 1926.

wenn unter τ ein reeller Parameter verstanden wird, und der Integrationsweg c eine Parallele zur imaginären Achse darstellt, die in Richtung der positiven imaginären Achse zu durchlaufen ist und alle Pole von $F(z)$ zur Linken läßt. Außerdem soll $F(z) \to 0$ mit $z \to \infty$. Die durch das komplexe Kurvenintegral dargestellte Funktion ist, wie sich zeigen läßt[19]), an der Stelle $\tau = 0$ stetig, falls $\lim_{z \to \infty} z F(z) = 0$. n-malige Differentiation unter dem Integralzeichen ist zulässig, falls $\lim_{z \to \infty} z^n F(z) = 0$.

Im folgenden soll nun unter Spezialisierung auf den zentrischen Fall die Durchbiegung einer eingespannten Kreisplatte unter dem Einfluß des schon oben[20]) erwähnten kreisringförmigen Lastfeldes ermittelt werden, wobei an Stelle der l. c. behandelten konstanten Lastverteilung der allgemeinere Fall angenommen sei, daß die Last proportional zur n-ten Potenz des Abstandes vom Plattenmittelpunkt über den Kreisring verteilt ist. Durch eine geringfügige Modifikation[21]) läßt sich noch eine gewisse Vereinfachung der Rechnungen erreichen.

Die vertikale Auslenkung $w(r, \varphi)$ der Punkte $P(r, \varphi)$ einer am Rande fest eingespannten Kreisplatte vom Radius r_0 hat, wenn der Mittelpunkt der Mittelebene der Platte als Pol eines Systems ebener Polarkoordinaten r, φ gewählt wird, die lineare Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w(r, \varphi) = \frac{p(r, \varphi)}{N} \tag{2}$$

mit

$$\Delta\Delta w \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial r^2} - \frac{2}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial r} + \frac{4}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4}$$

und die beiden Randbedingungen

$$[w(r, \varphi)]_{r=r_0} = 0\ , \quad \left[\frac{\partial w}{\partial r}\right]_{r=r_0} = 0 \tag{3}$$

zu erfüllen[22]). Dabei stellt $p(r, \varphi)$ die Last pro Flächeneinheit, N

[19]) l. c. ist die Stetigkeit der Funktion und ihrer Ableitungen nach dem Parameter unter schärferen Bedingungen nachgewiesen. Daß auch das Erfülltsein der oben genannten Bedingungen für die Stetigkeit hinreicht, läßt sich beweisen, wenn an Stelle der l. c. verwandten Kreisrahmen Rechteckrahmen treten.

[20]) S. 3.

[21]) Anstelle des von H. Schmidt benutzten Faktors e^{zr} wird hier [vgl. (5)] $e^{z \ln r}$ verwendet.

[22]) Vgl. Nadai, Elastische Platten, S. 56 u. 193.

eine von den elastischen Eigenschaften der Platte abhängige Konstante, die Plattensteifigkeit, dar. Der vorliegende achsialsymmetrische Belastungsfall läßt sich mit festem p_0 folgendermaßen charakterisieren

$$(4) \qquad p(r,\varphi) = p(r) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < r < r_1 \\ r^n p_0 & \text{„ } r_1 < r < r_2 \\ 0 & \text{„ } r_2 < r < r_0 ; \end{cases}$$

r_1 und r_2 bedeuten hierbei die Radien des gleichmäßig belasteten konzentrischen Kreisringes (Fig. 4).

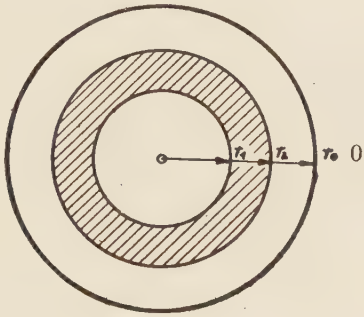

Fig. 4

Unter Benutzung der speziellen Integralrelation

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{e^{\tau z}}{z}\, dz = \begin{cases} 1 & \text{für } \tau > 0 \\ 0 & \text{„ } \tau < 0 \end{cases}$$

kann das Störungsglied der Differentialgleichung durch

$$(5) \qquad p(r) = \frac{r^n p_0}{2\pi i} \cdot \left\{ \int_{(c)} \frac{e^{z \ln \frac{r}{r_1}}}{z}\, dz - \int_{(c)} \frac{e^{z \ln \frac{r}{r_2}}}{z}\, dz \right\}$$

zur Darstellung gebracht werden. Wegen $\ln \frac{r}{r_\nu} > 0$ für $r > r_\nu$ und $\ln \frac{r}{r_\nu} < 0$ für $r < r_\nu$, $(\nu = 1, 2)$ springt $p(r)$ an der Stelle $r = r_1$ auf den Wert $r^n p_0$ und bei $r = r_2$ wieder auf 0 zurück. Zur Lösung des Problems findet das lineare Superpositionsprinzip in der Integralform Anwendung. Es wird ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta \Delta u_1(r; z) = r^n e^{z \ln r}$$

mit dem φ-unabhängigen wesentlichen Bestandteil der rechten

Seite von (5) als Störungsglied bestimmt

$$u_1(r;z) = r^{n+4} \frac{e^{z\ln r}}{[z+(n+2)]^3\,[z+(n+4)]^2}. \tag{6}$$

Dann stellt, falls die Zulässigkeit der unter dem Integralzeichen vorzunehmenden Differentiationen nach r erwiesen ist,

$$U_\nu(r) = \int_{(c)} \lambda_\nu(z) u_1(r;z)\,dz$$

ein partikuläres Integral von

$$\Delta\Delta U_\nu(r) = r^n \int_{(c)} \lambda_\nu(z) e^{z\ln r}\,dz$$

und

$$U(r) = U_1(r) - U_2(r) = \int_{(c)} [\lambda_1(z) - \lambda_2(z)]\, u_1(r;z)\,dz$$

ein partikuläres Integral von

$$\Delta\Delta U(r) = r^n \int_{(c)} [\lambda_1(z) - \lambda_2(z)]\, e^{z\ln r}\,dz$$

dar. In dem vorliegenden Fall ist ersichtlich

$$\lambda_\nu(z) = \frac{p_0}{2\pi i} \frac{e^{z\ln\frac{1}{r_\nu}}}{z}.$$

Die 4-malige Differentiation unter dem Integralzeichen nach r ist gestattet, da

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z\,[z+(n+2)]^2\,[z+(n+4)]^2} = 0.$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen (3) wird zunächst der Ansatz gemacht

$$u(r;z) = u_1(r;z) + u_0(r;z) \tag{7}$$

wobei $u_0(r;z)$ diejenige Lösung der homogenen Gleichung

$$\Delta\Delta u(r;z) = 0$$

darstellt, welche die beiden Randbedingungen

$$\begin{cases} [u_0(r;z)]_{r=r_0} = -[u_1(r;z)]_{r=r_0} = g(z) \\ \left[\frac{\partial u_0}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]_{r=r_0} = h(z) \end{cases} \tag{8}$$

erfüllt. Die vorstehende biharmonische Randwertaufgabe für den Kreis wird durch die Funktion gelöst [23])

---

[23]) Vgl. Ph. Frank und R. v. Mises, Die Diff. u. Integralgl. der Mechanik und Physik, 2. Aufl., Bd. 1, S. 851, Braunschweig 1930. In der hier benutzten Form: H. Schmidt, Ing. Arch. 1, S. 147, 1930.

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} u_0(r;z) = &-\frac{(r_0^2-r^2)^2}{4\pi r_0}\int_0^{2\pi}\frac{h(z)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,dz \\ &+\frac{(r_0^2-r^2)^2}{4\pi r_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{g(z)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,dz \\ &+\frac{(r_0^2-r^2)^3}{4\pi r_0^2}\int_0^{2\pi}\frac{g(z)}{[r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^2}\,dz \end{aligned}\right.$$

mit

$$g(z) = -\frac{r_0^{n+4}e^{z\ln r_0}}{[z+(n+2)]^2[z+(n+4)]^2};\quad h(z) = -\frac{r_0^{n+3}e^{z\ln r_0}}{[z+(n+2)]^3[z+(n+4)]}.$$

Auf Grund des linearen Superpositionsprinzips läßt sich nun die Lösung des Biegungsproblems (2), (3), (4) mit (5) folgendermaßen angeben

$$(10)\qquad w(r) = \frac{P_0}{N}\,W(r)$$

wenn

$$(11)\quad W(r) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(c)}\frac{e^{z\ln\frac{1}{r_1}}}{z}\cdot[u_1(r;z)+u_0(r;z)]\,dz - \int_{(c)}\frac{e^{z\ln\frac{1}{r_2}}}{z}[u_1(r;z)+u_0(r;z)]\,dz\right\}$$

und die auftretenden komplexen Kurvenintegrale im Sinne des Integralsatzes (1) zu verstehen sind. Zur Auswertung von (11) werden zunächst nach (1) die Integrale berechnet

$$(12)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{e^{z\ln\frac{r}{r_\nu}}}{z[z+(n+2)]^2[z+(n+4)]^2}\,dz$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } r \leqq r_\nu \\ \dfrac{1}{(n+2)^2(n+4)^2}+\dfrac{n+1}{4(n+2)^2}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+2}-\dfrac{n+5}{4(n+4)^2}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+4} \\ -\left[\dfrac{1}{4(n+2)}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+2}+\dfrac{1}{4(n+4)}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+4}\right]ln\,\dfrac{r}{r_\nu} \text{ für } r \geqq r_\nu \end{cases}$$

$$(13)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{e^{z\ln\frac{r}{r_\nu}}}{z[z+(n+2)]^2[z+(n+4)]}\,dz$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ für } r \leqq r_\nu \\ \dfrac{1}{(n+2)^2(n+4)} + \dfrac{n}{4(n+2)^2}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+2} \\ -\dfrac{1}{4(n+4)}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+4} - \dfrac{1}{2(n+2)}\left(\dfrac{r_\nu}{r}\right)^{n+2} \ln\dfrac{r}{r_\nu} \\ \qquad\qquad \text{für } r \geqq r_\nu . \end{cases}$$

$n \neq -2, -4$ [24])

Vertauschung der Reihenfolge der Integrationen nach α und z in (11) führt mit (12), (13) zu den Poissonschen Integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^\varkappa} \quad , \quad (\varkappa = 1,2)$$

deren Berechnung zweckmäßig als Realteil komplexer Integrale unter Anwendung des Residuensatzes geschieht [25]).

Es ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)} = \frac{2\pi}{r_0^2 - r^2}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^2} = \frac{2\pi(r_0^2 + r^2)}{(r_0^2 - r^2)^3} .$$

Nach einer zusammenfassenden Zwischenrechnung stellt sich das Ergebnis der Auswertung von (11) schließlich in der Form dar

$$(14)\qquad W(r) = \begin{cases} W_0(r) & \text{für } 0 \leqq r \leqq r_1 \\ W_0(r) + W_1(r) & \text{„ } r_1 \leqq r \leqq r_2 \\ W_0(r) + W_2(r) & \text{„ } r_2 \leqq r \leqq r_0 , \end{cases}$$

wobei

$$W_0(r) = \frac{(n+4)r^2 + (n+6)r_0^2}{8r_0^2(n+4)^2}\left(r_1^{n+4} - r_2^{n+4}\right) - \frac{(n+2)r_0^2 + nr^2}{8(n+2)^2}\left(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}\right)$$

$$- \frac{(n+4)r^2 r_1^{n+2} + (n+2)r_1^{n+4}}{4(n+2)(n+4)} \ln\frac{r_1}{r_0} + \frac{(n+4)r^2 r_2^{n+2} + (n+2)r_2^{n+4}}{4(n+2)(n+4)} \ln\frac{r_2}{r_0}$$

---

[24]) Die ausgeschlossenen Fälle $n = -2$ und $n = -4$ müßten besonders behandelt werden. Die Integranden der dabei auftretenden komplexen Kurvenintegrale hätten eine andere Gestalt. Auf die Ausführung der Rechnung soll hier verzichtet werden.

[25]) Vgl. H. Schmidt, Ing. Arch. 1, S. 153, 1930.

$$W_1(r) = \frac{r^{n+4}}{(n+2)^2(n+4)^2} + \frac{n+1}{4(n+2)^2} r^2 r_1^{n+2} - \frac{n+5}{4(n+4)^2} r_1^{n+4}$$
$$- \left(\frac{1}{4(n+2)} r^2 r_1^{n+2} + \frac{1}{4(n+4)} r_1^{n+4}\right) ln \frac{r}{r_1}$$

$$W_2(r) = \frac{n+1}{4(n+2)^2} r^2 \left(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}\right) - \frac{n+5}{4(n+4)^2} \left(r_1^{n+4} - r_2^{n+4}\right)$$
$$- \left(\frac{r^2 r_1^{n+2}}{4(n+2)} + \frac{r_1^{n+4}}{4(n+4)}\right) ln \frac{r}{r_1} + \left(\frac{r^2 r_2^{n+2}}{4(n+2)} + \frac{r_2^{n+4}}{4(n+4)}\right) ln \frac{r}{r_2}$$ [26].

Auf analogem Wege ergeben sich auch die entsprechenden Ausdrücke für die Biegung einer Kreismembran

$$W_0(r) = \frac{1}{(n+2)^2} \left(r_1^{n+2} - r_2^{n+2}\right) + \frac{1}{n+2} \left(r_1^{n+2} ln \frac{r_0}{r_1} - r_2^{n+2} ln \frac{r_0}{r_2}\right)$$

$$W_1(r) = \frac{1}{(n+2)^2} \left(r^{n+2} - r_1^{n+2}\right) - \frac{1}{n+2} r_1^{n+2} ln \frac{r}{r_1}$$

$$W_2(r) = \frac{1}{(n+2)^2} \left(r_2^{n+2} - r_1^{n+2}\right) + \frac{1}{n+2} \left(r_2^{n+2} ln \frac{r}{r_2} - r_1^{n+2} ln \frac{r}{r_1}\right).$$

Die Tatsache, daß der Lösungsansatz für die Platte auch bei dem entsprechenden Problem für die Membran zum Ziele führt und umgekehrt, die im weiteren Verlauf der Untersuchung noch deutlicher zur Geltung kommen wird, beruht natürlich auf dem inneren Zusammenhang zwischen den Differentialoperatoren $\Delta\Delta$ und Δ und auf der daraus resultierenden Darstellbarkeit der biharmonischen Funktionen durch harmonische Funktionen [27].

2. Kreismembran.

Den Gegenstand der Betrachtung bildet zunächst die Kreismembran. Bevor die in der Einleitung formulierte Frage ihre endgültige Beantwortung findet, soll vorerst noch die Spezialisierung vorgenommen werden, daß das konstante Lastfeld (p_0 pro Flächeneinheit) aus einem konzentrisch liegenden Kreissektor besteht (Fig. 5). Die besondere Behandlung dieses an sich schon interessanten Belastungsfalles empfiehlt sich vornehmlich wegen der einfacher zu überschauenden rechnerischen Verhältnisse; außerdem können die

[26] Für $n = -1$, $r_1 = c$, $r_2 = b$, ergibt sich der von N. M. Basu und H. M. Sen Gupta betrachtete Belastungsfall. Vgl. S. 5 und 6.

[27] Vgl. Frank u. Mises, Diff. u. Int. Gl. d. Mech. u. Phys., S. 848.

meisten der durchzuführenden Rechnungen sinngemäß auf den exzentrischen Fall übertragen werden.

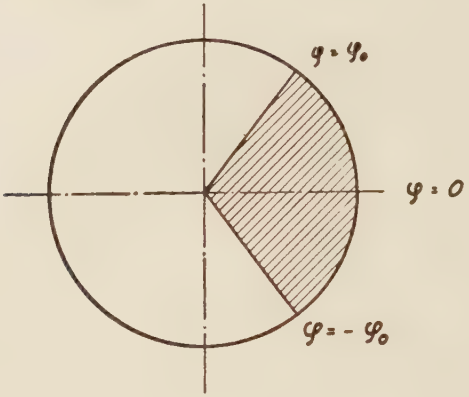

Fig. 5

Es sei definiert

$$0 \leqq r \leqq r_0\,, \quad -\pi \leqq \varphi < +\pi\,, \quad 0 \leqq \varphi_0 \leqq +\pi\,.$$

Mit den schon auf Seite 10 für die Platte getroffenen Festsetzungen hat die vertikale Auslenkung $w(r, \varphi)$ der Membranpunkte $P(r, \varphi)$ der Differentialgleichung

$$\Delta w(r, \varphi) \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = -\frac{p(r, \varphi)}{c^2} \tag{15}$$

und der Randbedingung

$$[w(r, \varphi)]_{r=r_0} = 0 \tag{16}$$

zu genügen; c bedeutet dabei eine Materialkonstante. Für die hier nur von φ abhängige Last (pro Flächeneinheit)

$$p(r, \varphi) = p(\varphi) = \begin{cases} 0 \text{ für } -\pi \leqq \varphi < -\varphi_0 \\ p_0 \text{ „ } -\varphi_0 \leqq \varphi \leqq +\varphi_0 \\ 0 \text{ „ } +\varphi_0 < \varphi < +\pi \end{cases}$$

kann mit Hilfe des Integralsatzes (1) der Ansatz gemacht werden

$$p(\varphi) = \frac{p_0}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{(\varphi+\varphi_0)z}}{z}\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{(\varphi-\varphi_0 z}}{z}\,dz\right\} \tag{18}$$

Wenn φ das Intervall $(-\pi, +\pi)$ durchläuft, springt der erste Bestandteil der rechten Seite an der Stelle $\varphi = -\varphi_0$ von 0 auf den festen Wert p_0 und bleibt von da ab konstant, während sich der zweite Bestandteil an der Stelle $\varphi = +\varphi_0$ entsprechend einschaltet.

Ein partikuläres Integral der Differentialgleichung (15) mit dem wesentlichen Bestandteil $e^{\varphi z}$ von (18) als Störungsglied ist durch

$$u_1(r,\varphi;z) = r^2 \frac{e^{\varphi z}}{(z+2i)(z-2i)} \tag{19}$$

gegeben. Um die Randbedingung (16) zu erfüllen, wird hierzu diejenige Lösung $u_0(r,\varphi;z)$ der homogenen Gleichung

$$\Delta u(r,\varphi;z) = 0$$

hinzugefügt, die der Randbedingung genügt

$$[u_0(r,\varphi;z)]_{r=r_0} = -[u_1(r,\varphi;z)]_{r=r_0} = -r_0^2 \frac{e^{\varphi z}}{(z+2i)(z-2i)} = g(\varphi;z). \tag{20}$$

Dieses Randwertproblem wird durch die Funktion gelöst [28])

$$u_0(r,\varphi;z) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g(\alpha;z)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)} d\alpha\,. \tag{21}$$

Damit stellt sich die Lösung des vorgelegten Biegungsproblems (15), (16) mit (18) unter Anwendung des linearen Superpositionsprinzips in der Form dar

$$w(r,\varphi) = -\frac{P_0}{c^2} W(r,\varphi) \tag{22}$$

falls

$$W(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{\varphi_0 z}}{z}[u_1(r,\varphi;z) + u_0(r,\varphi;z)]\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{-\varphi_0 z}}{z}[u_1 + u_0]\,dz\right\}. \tag{23}$$

Die Integrale sind wieder als komplexe Kurvenintegrale nach (1) aufzufassen. Um nun (23) auszuwerten, werden zunächst die dem partikulären Integral (19) entsprechenden Bestandteile von (23) nach dem Integralsatz berechnet [29])

$$\frac{r^2}{2\pi i}\int \frac{e^{(\varphi \pm \varphi_0)z}}{z(z+2i)(z-2i)}\,dz = \begin{cases} \frac{r^2}{4}[1 - \cos 2(\varphi \pm \varphi_0)] & \text{für } \varphi \gtrless \mp\varphi_0 \\ 0 & \text{„ } \varphi \lessgtr \mp\varphi_0. \end{cases} \tag{24}$$

Bei der Berechnung der dem Integral der homogenen Gleichung entsprechenden Bestandteile von (23) ist nach Vertauschung der

---

[28]) Frank und Mises, Diff. gl. d. Mech. u. Phys., S. 687.

[29]) Hierbei ist bemerkenswert, daß das angewandte Integrationsverfahren die zur Erfüllung der Übergangsbedingungen bei $\varphi = -\varphi_0$ und $+\varphi_0$ notwendigen Integrale der homogenen Gleichung $r^2 \cos 2(\varphi \pm \varphi_0)$ mitliefert. Das war auch vorauszusehen, da die Stetigkeitsbedingungen für die durch die komplexen Integrale dargestellten Funktionen und ihre partiellen 1. Ableitungen erfüllt sind.

Integrationsreihenfolge zu beachten, daß der Integrand der auftretenden Poissonintegrale nach (24) für $-\pi \leqq \alpha \leqq -\varphi_0$ beziehungsweise für $-\pi \leqq \alpha \leqq +\varphi_0$ verschwindet. Es sind also die Integrale

$$\int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos n(\alpha+\varphi_0)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha\ ,\quad \int_{+\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos n(\alpha-\varphi_0)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha$$

für $n = 0, 2$ auszuwerten. Das geschieht zweckmäßig auf komplexem Wege und soll in einem speziellen Fall durchgeführt werden.

$$\mathfrak{J} = \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos 2(\alpha-\varphi_0)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha = -\frac{1}{2r_0 r}\int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos 2(\alpha-\varphi)}{-\frac{r_0^2+r^2}{2r_0 r}+\cos 2(\alpha-\varphi)}\,d\alpha$$

geht durch die Substitution $\psi = \alpha - \varphi$ über in

$$-\frac{1}{2r_0 r}\int_{\varphi_0-\varphi}^{\pi-\varphi} \frac{\cos 2(\psi+\varphi-\varphi_0)}{-\frac{r_0^2+r^2}{2r_0 r}+\cos\psi}\,d\psi\,.$$

und kann aufgefaßt werden als Realteil von

$$-\frac{1}{2r_0 r}\int_{\varphi_0-\varphi}^{\pi-\varphi} \frac{e^{2i[\psi+(\varphi-\varphi_0)]}}{-\frac{r_0^2+r^2}{2r_0 r}+\cos\psi}\,d\psi\,.$$

Wird als neue Integrationsvariable die komplexe Veränderliche $z = e^{i\psi}$ eingeführt, so ergibt sich mit $z_1 = \frac{r}{r_0}$, $z_2 = \frac{r_0}{r}$

$$\mathfrak{J} = \Re\left\{\frac{ie^{i(\varphi-\varphi_0)}}{r_0 r}\int_{(K_0)e^{i(\varphi_0-\varphi)}}^{e^{i(\pi-\varphi)}} \frac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)}\,dz\right\}$$

K_0 bedeutet dabei den im positiven Sinne zu durchlaufenden Einheitskreis der z-Ebene. Partialbruchzerlegung des Integranden führt weiter zu

$$\mathfrak{J} = \Re\left\{\frac{ie^{2i(\varphi-\varphi_0)}}{r^2-r_0^2}\int_{(K_0)e^{i(\varphi_0-\varphi)}}^{e^{i(\pi-\varphi)}} \left[(z_1-z_2)+\frac{z_1^2}{z-z_1}-\frac{z_2^2}{z-z_2}\right]dz\right\}$$

Der vom Integrationswege unabhängige rationale Bestandteil des

Integrals ist

$$(z_1 - z_2)\int_{e^{i(\varphi_0-\varphi)}}^{e^{i(\pi-\varphi)}} dz = (z_2 - z_1)\left[e^{-i\varphi} + e^{i(\varphi_0-\varphi)}\right].$$

Bei der Berechnung der transzendenten Teile ist zu beachten, daß der Logarithmus unendlich vieldeutig ist. Unter den im folgenden auftretenden Logarithmen sollen Hauptwerte verstanden sein, deren Argumente zwischen $-\pi$ und $+\pi$ definiert sind.

Es ist

$$\mathfrak{J}_1 = z_1^2 \int_{(K_0)}^{e^{i(\pi-\varphi)}} \frac{dz}{z - z_1} = z_1^2 \left\{\log\left[e^{i(\pi-\varphi)} - z_1\right] - \log\left[e^{i(\varphi_0-\varphi)} - z_1\right] + C\right\}$$

$$= z_1^2 \left\{\log\left[-\cos\varphi - \frac{r}{r_0} + i\sin\varphi\right]\right.$$

$$\left. - \log\left[\cos(\varphi - \varphi_0) - \frac{r}{r_0} - i\sin(\varphi - \varphi_0)\right] + C\right\}.$$

Der Integrationsweg verläuft in der von $z_1 = \frac{r}{r_0}$ über die negative reelle Achse aufgeschlitzten z-Ebene. Der Wert der Konstanten C hängt davon ab, ob der Integrationsweg, dessen Anfangs- und Endpunkt mit φ variabel ist, den Schlitz überquert oder nicht; es ist $C = 0$ oder $2\pi i$. Bei der Zerlegung der Logarithmen in Real- und Imaginärteil wird von der Relation Gebrauch gemacht

$$\log(x + iy) = ln + \sqrt{x^2 + y^2} + 2i \operatorname{arctg} \frac{y}{+\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

Mit den hierbei auftretenden Arcustangenten ist stets der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ definierte Hauptwert gemeint. Die Zulässigkeit dieser Festsetzung folgt aus $+\sqrt{x^2 + y^2} + x \geqq 0$.

Die Zerlegung ergibt

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{r^2}{r_0^2}\left\{ln\sqrt{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}\right.$$

$$+ 2i \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin\varphi}{\sqrt{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi} - [r + r_0\cos\varphi]}$$

$$- ln\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$\left. + 2i \operatorname{arctg} \frac{r_0 \sin(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)} - [r - r_0\cos(\varphi - \varphi_0)]} + C\right\}$$

Analog ergibt sich mit $C' = 0$ oder $\pm 2\pi i$

$$\mathfrak{J}_2 = z_2^2 \int_{(K_0)}^{e^{i(\pi-\varphi)}} \frac{dz}{z - z_2} = \frac{r_0^2}{r^2}\Big\{ ln\sqrt{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}$$

$$+ 2i \operatorname{arctg} \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi} - [r_0 + r\cos\varphi]}$$

$$- ln\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)}$$

$$+ 2i \operatorname{arctg} \frac{r\sin(\varphi - \varphi_0)}{\sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)} - [r_0 - r\cos(\varphi - \varphi_0)]} + C'\Big\}.$$

Damit kann schließlich der Wert des gesuchten Integrals angegeben werden

$$\mathfrak{J} = \frac{r_0^2 + r^2}{2r_0^2 r^2}\sin 2(\varphi - \varphi_0)\, ln \frac{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi - \varphi_0)}{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}$$

$$+ \frac{1}{r_0 r}\{\sin(\varphi - 2\varphi_0) + \sin(\varphi - \varphi_0)\}$$

$$+ \frac{2r^2}{r_0^2(r_0^2 - r^2)}\cos 2(\varphi - \varphi_0)\{\Phi(r_0, r, \varphi, \pi) - \Phi(r_0, r, \varphi, -\varphi_0) + c\}$$

$$- \frac{2r_0^2}{r^2(r_0^2 - r^2)}\cos 2(\varphi - \varphi_0)\{\Phi(r, r_0, \varphi, \pi) - \Phi(r, r_0, \varphi, -\varphi_0) + c'\},$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$(25)\quad \Phi(\varrho, \bar{\varrho}, \varphi, \psi) \equiv \operatorname{arctg} \frac{\varrho\sin(\varphi + \psi)}{\sqrt{\bar{\varrho}^2 + \varrho^2 - 2\bar{\varrho}\varrho\cos(\varphi + \psi)} - [\bar{\varrho} - \varrho\cos(\varphi + \psi)]}$$

und die Größen c und c' durch

$$c = \begin{cases} 0 \text{ für } -\pi < \varphi < -\pi + \varphi_0 \\ \pi \;\; „ \;\; -\pi + \varphi_0 < \varphi < 0 \\ 0 \;\; „ \;\; 0 < \varphi < +\pi \end{cases} \qquad c' = \begin{cases} 0 \text{ für } -\pi < \varphi < -\pi + \varphi_0 \\ \pi \;\; „ \;\; -\pi + \varphi_0 < \varphi < 0 \\ 0 \;\; „ \;\; 0 < \varphi < \varphi_0 \\ -\pi \text{ für } \varphi_0 < \varphi < \pi \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Berechnung der übrigen Poissonintegrale geschieht auf dem gleichen Wege.

Mit

$$W_0 = \frac{1}{4\pi} W_0^*$$

und

$$W_0^* = \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\left\{\sin 2(\varphi+\varphi_0)\, ln\, \frac{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi+\varphi_0)} - \sin 2(\varphi-\varphi_0)\, ln\, \frac{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi-\varphi_0)}\right\}$$
$$+ r^2[\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 2(\varphi-\varphi_0)]\,\Phi(r_0, r, \varphi, \pi)$$
$$- \frac{r_0^4}{r^2}[\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 2(\varphi-\varphi_0)]\,\Phi(r, r_0, \varphi, \pi)$$
$$+ [r_0^2 - r^2\cos 2(\varphi-\varphi_0)]\,\Phi(r_0, r, \varphi, -\varphi_0)$$
$$- [r_0^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2(\varphi-\varphi_0)]\,\Phi(r, r_0, \varphi, -\varphi_0)$$
$$- [r_0^2 - r^2\cos 2(\varphi+\varphi_0)]\,\Phi(r_0, r, \varphi, \varphi_0)$$
$$+ [r_0^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2(\varphi+\varphi_0)]\,\Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0)$$
$$+ \frac{r_0}{r}(r_0^2 - r^2)[\sin\varphi_0 - \sin 2\varphi_0]\cos\varphi$$

wird das Ergebnis der Auswertung von (23) erhalten.

(26) $W =$

in I: $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi+\varphi_0)$

II: $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\{\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 2(\varphi-\varphi_0)\}$

III: $W_0 + \frac{1}{4}(r^2 - r_0^2) - \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi-\varphi_0)$

IV: $W_0 + \frac{1}{4}(r^2 - r_0^2) - \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi+\varphi_0)$

V: $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cdot\{\cos 2(\varphi-\varphi_0) - \cos 2(\varphi+\varphi_0)\}]$

VI: $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi-\varphi_0)$,

das unter Beachtung von (22) die Lösung des Problems darstellt. Die getroffene Unterteilung des Kreisgebietes ist aus Fig. 6 ersichtlich.

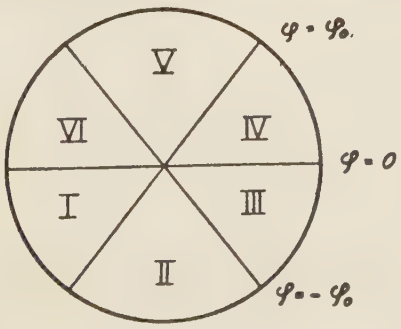

Fig. 6

Für $r = 0$ nimmt die Lösung in allen Teilgebieten eine unbestimmte Form an, die als Grenzwert für $r \to 0$ nach der Bernoulli-L'Hospitalschen Regel bestimmt werden kann. Die Auslenkung des Membranmittelpunktes, der sogenannte Biegungspfeil in der Mitte, läßt sich einfacher dadurch ermitteln, daß in den zu berechnenden Integralen von vornherein $r = 0$ gesetzt wird. Es ergibt sich

$$[w(r, \varphi)]_{r=0} = \frac{P_0}{c^2} \cdot \frac{r_0^2}{8\pi} \{2\varphi_0 - \sin 2\varphi_0\}.$$

Der im ganzen Kreisgebiet definierte Lösungsbestandteil stellt als algebraische Summe von Real- bzw. Imaginärteilen von analytischen Funktionen eine Lösung der homogenen Gleichung $\Delta w = 0$ dar. Das gleiche gilt für die Zusatzglieder in den unbelasteten Gebieten (I, II, V, VI). In den belasteten Gebieten (III, IV) tritt außer Lösungen der homogenen Gleichung ein partukuläres Integral $-\frac{p_0}{c^2}\frac{r^2}{4}$ der inhomogenen Gleichung $\Delta w = -\frac{p_0}{c^2}$ auf. Auf dem Rande $r = r_0$ verschwindet in allen Teilgebieten die Durchbiegung, wie sich unmittelbar erkennen läßt. Die Stetigkeit der Lösung und ihrer partiellen Ableitungen 1. Ordnung ist dadurch gewährleistet (vgl. Anm. auf S. 19), daß

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0 - 0} \Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0) = -\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{\varphi \to \varphi_0 + 0} \Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\varphi \to \varphi_0 - \pi - 0} \Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0) = +\frac{\pi}{2} \qquad \lim_{\varphi \to \varphi_0 - \pi + 0} \Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0) = -\frac{\pi}{2}$$

und entsprechendes für die Funktionen $\Phi(r_0, r, \varphi, \varphi_0), \cdots \Phi(r_0, r, \varphi, \pi)$ gilt.

Es sollen noch einige Spezialisierungen in bezug auf die Lastverteilung vorgenommen werden. Für $\varphi_0 \to 0$, d. h. bei verschwindender Last, verschwindet die Durchbiegung. Für $\varphi_0 \to \pi$, d. h. bei gleichmäßig belasteter Vollmembran geht die Durchbiegung über in $-\frac{p_0}{4c^2}(r^2 - r_0^2)$. Für $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2}$ wird die Hälfte $-\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq +\frac{\pi}{2}$ der Membran gleichmäßig belastet. Die Durchbiegung stellt sich mit (22) in der Form dar

$$W =$$

unbelastete Hälfte

$$W_0 - \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right) \cos 2\varphi$$

belastete Hälfte

$$W_0 + \frac{1}{4}(r^2 - r_0^2) + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right) \cos 2\varphi;$$

dabei ist

$$W_0 = \frac{1}{16\pi}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi \ln \frac{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r \sin\varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \sin\varphi}$$
$$+ \frac{(r_0^2 - r^2)r_0}{4\pi r}\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{4\pi}(r_0^2 + r^2\cos 2\varphi)\left\{\Phi\left(r_0, r, \varphi - \frac{\pi}{2}\right) - \Phi\left(r_0, r, \varphi, + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{4\pi}\left(r_0^2 + \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2\varphi\right)\left\{\Phi\left(r, r_0, \varphi, -\frac{\pi}{2}\right) - \Phi\left(r, r_0, \varphi, + \frac{\pi}{2}\right)\right\}.$$

Um den Übergang zu einer Linienlast vom Betrage P_0 pro Längeneinheit, die über den Membranhalbmesser $\varphi = 0$ verteilt ist, zu vollziehen, ist in der Lösung für die Sektorlast $p_0 = \frac{P_0}{r_0\varphi_0}$ zu setzen, und der Grenzübergang $\varphi_0 \to 0$ auszuführen. Dieses liefert

$$w(r, \varphi) = -\frac{P_0}{c^2} W(r, \varphi)$$

mit

$$W = \begin{cases} \text{in } -\pi < \varphi < 0 \\ W_0 - \frac{1}{r_0}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi \\ \text{in } 0 < \varphi < \pi \\ W_0 + \frac{1}{r_0}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\sin 2\varphi \end{cases}$$

und

$$W_0 = \frac{1}{4\pi r_0}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\left\{\cos 2\varphi \ln \frac{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\varphi} - \sin 2\varphi \frac{r_0 r \sin\varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\varphi}\right\}$$
$$- \frac{r^2}{2\pi r_0}\sin 2\varphi\, \Phi(r_0, r, \varphi, \pi) + \frac{r_0^3}{2\pi r^2}\sin 2\varphi\, \Phi(r, r_0, \varphi, \pi)$$
$$- \frac{r^2}{\pi r_0}\sin 2\varphi\, \Phi(r_0, r, \varphi, 0) + \frac{r_0^3}{\pi r^2}\sin 2\varphi\, \Phi(r, r_0, \varphi_0, 0)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}(r_0^2 - r^2\cos 2\varphi)\frac{r\cos\varphi - r_0}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\varphi}$$
$$- \frac{1}{4\pi r_0}\left(r_0^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2\varphi\right)\frac{r_0 + r_0 r\cos\varphi - r^2}{r_0^2 r^2 - 2r_0 r\cos\varphi}$$
$$+ \frac{3}{4\pi r}(r_0^2 - r^2)\cos\varphi$$

Jetzt soll der noch ausstehende allgemeinere Fall der exzentrischen Sektorlast (Fig. 7) erledigt werden.

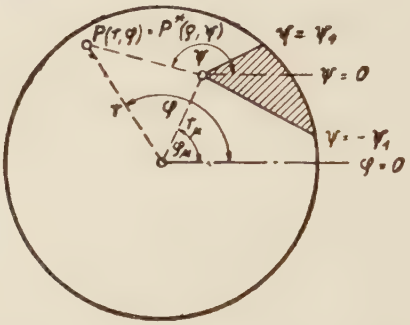

Fig. 7

Zu diesem Zweck wird ein neues System von Polarkoordinaten ϱ, ψ eingeführt. Das geschieht durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} r\cos\varphi &= r_\mu\cos\varphi_\mu + \varrho\cos\psi \\ r\sin\varphi &= r_\mu\sin\varphi_\mu + \varrho\sin\psi\,, \end{aligned} \tag{27}$$

aus denen sich ergibt

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{r_\mu^2 + r^2 - 2r_\mu r\cos(\varphi-\varphi_\mu)} \\ \psi &= \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi - r_\mu\sin\varphi_\mu}{r\cos\varphi - r_\mu\cos\varphi_\mu}\,^{30}), \end{aligned} \tag{28}$$

r_μ, φ_μ stellen dabei die Koordinaten des neuen Poles in bezug auf das alte System dar. Die Lage des gleichmäßig mit p_0 pro Flächeneinheit belasteten exzentrischen Sektors vom Öffnungswinkel $2\psi_1$ werde symmetrisch zur neuen Polarachse $\psi = 0$ gewählt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet. ψ sei in dem Intervall $(-\pi, +\pi)$, ψ_1 in $(0, \pi)$ definiert. Durch die Substitutionen (27), die eine Parallelverschiebung darstellen, geht die Differentialgleichung der Membranbiegung über in

$$\Delta w^*(\varrho,\psi) = -\frac{p^*(\varrho,\psi)}{c^2}\,. \tag{29}$$

Die für die Lösung zu erfüllende Randbedingung lautet

$$[w^*(\varrho,\psi)]_{\substack{\varrho=\varrho_0\\ \psi=\psi_0}} = 0\,, \tag{30}$$

wenn gesetzt wird

$$\varrho_0 = [\varrho]_{r=r_0}\,, \qquad \psi_0 = [\psi]_{r=r_0}\,.$$

30) Auf die Mehrdeutigkeit des arctg braucht aus einem weiter unten sich ergebenden Grunde keine Rücksicht genommen zu werden.

Für das die Last darstellende Störungsglied wird wie im konzentrischen Fall der Ansatz gemacht

$$(31) \qquad p^*(\varrho, \psi) = p^*(\psi) = \frac{p_0}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{(\psi+\psi_1)z}}{z}\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{(\psi-\psi_1)z}}{z}\,dz\right\},$$

und ein partikuläres Integral der inhomogenen Gleichung mit $e^{\psi z}$ als Störungsglied bestimmt

$$(32) \qquad u_1^*(\varrho, \psi; z) = \varrho^2 \frac{e^{\psi z}}{(z+2i)(z-2i)}\,.$$

Zur Erfüllung der Randbedingung (30) wird diejenige Lösung $u_0^*(\varrho, \psi, z)$ der homogenen Gleichung $\Delta u = 0$ superponiert, die der Randbedingung genügt

$$(33) \quad [u_0^*(\varrho, \psi; z)]_{\substack{\varrho=\varrho_0 \\ \psi=\psi_0}} = -[u_1^*(\varrho, \psi; z)]_{\substack{\varrho=\varrho_0 \\ \psi=\psi_0}} = -\varrho_0^2 \frac{e^{\psi_0 z}}{(z+2i)(z-2i)} = g^*(\varrho_0, \psi_0; z)\,.$$

Diese Randwertaufgabe löst, wenn wieder r, φ als unabhängige Variable angesehen werden, was durch Fortlassen des Index Stern charakterisiert sein mag, die Funktion

$$(34) \qquad u_0(r, \varphi, z) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g(\alpha; z)}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\alpha - \varphi)}\,dz$$

Mit

$$(35) \qquad w(r, \varphi) = -\frac{p_0}{z^2}\,W(r, \varphi)$$

stellt dann

$$(36) \quad W(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{\psi_1 z}}{z}\,[u_1(r, \varphi; z) + u_0(r, \varphi; z)]\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{-\psi_1 z}}{z}\,[u_1 + u_0]\,dz\right\}$$

die Lösung des Problems auf das alte Koordinatensystem r, φ bezogen dar. Die Berechnung der komplexen Kurvenintegrale in (36) geschieht unter Beibehaltung von ϱ und ψ in ihrer Bedeutung als neue Variable. Die dem partikulären Integral der inhomogenen Gleichung entsprechenden Bestandteile von (36) ergeben

$$(37) \quad \frac{\varrho^2}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{e^{(\psi\pm\psi_1)z}}{z(z+2i)(z-2i)}\,dz = \begin{cases} \frac{\varrho^2}{4}[1 - \cos 2(\psi \pm \psi_1)] \text{ für } \psi \gtrless \pm\psi_1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{„ } \psi \lessgtr \pm\psi_1. \end{cases}$$

Hierin werden nun nach (28) unter Verwendung der Relationen

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}\,, \quad \sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}$$

r, φ als unabhängige Variable eingeführt. Eine Zwischenrechnung liefert

$$\frac{\varrho^2}{4}[1-\cos 2(\psi \pm \psi_1)] = \frac{1}{4}\{r_\mu^2 + r^2 - 2r_\mu r\cos(\varphi-\varphi_\mu)$$
$$- r^2\cos 2(\varphi \pm \psi_1) - r_\mu^2\cos 2(\varphi_\mu \pm \psi_1) + 2r_\mu r\cos(\varphi+\varphi_\mu \pm 2\psi_1)\}.$$

Die gleichen Ausdrücke, nur mit r_0 statt r, treten nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge bei der Berechnung der dem Integral der homogenen Gleichung entsprechenden Bestandteile von (36) auf. Bei der Ausführung der Integration nach α ist zu beachten, daß gemäß (37) die Integranden der auftretenden Poissonintegrale für $-\pi < \psi_0 < -\psi_1$ bzw. $-\pi < \psi_0 < +\psi_1$ verschwinden Diese letztere Bedingung drückt sich α-mäßig dadurch aus, daß nach α zwischen den Grenzen $\varphi_3 \cdots \pi - \varphi_2$ bzw. $\varphi_1 \cdots \pi - \varphi_2$ zu integrieren ist. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ sind dabei nach (27) durch

$$\varphi_1 = \arcsin\left[\frac{r_\mu}{r}\sin(\varphi_\mu - \psi_1)\right] + \psi_1\,, \quad \varphi_2 = \arcsin\left[\frac{r_\mu}{r_0}\sin\varphi_\mu\right]$$
$$\varphi_3 = \arcsin\left[\frac{r_\mu}{r_0}\sin(\varphi_\mu + \psi_1)\right] - \psi_1 \qquad [31])$$

gegeben (vgl. Fig. 8). Die zu berechnenden Poissonintegrale [31]) tragen den gleichen Charakter wie die anläßlich des konzentrischen Lastsektors aufgetretenen Integrale. Ihre Berechnung erfolgt analog nach dem damals in einem besonderen Falle durchgeführten Verfahren.

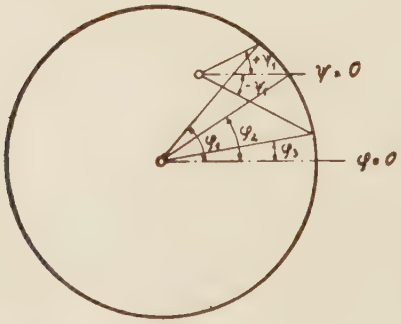

Fig. 8

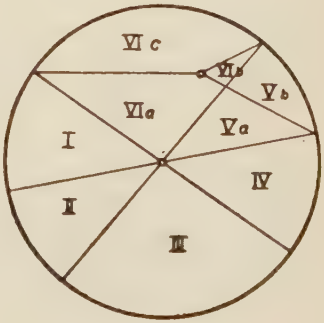

Fig. 9

[31]) Die arcsin sind Hauptwerte.

Das Ergebnis der Auswertung von (36) stellt sich mit der aus Fig. 9 ersichtlichen Gebietsunterteilung in der Form dar

(38) $W =$

in I : W_0

II : $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi + \psi_1) + \frac{1}{2}\left(r_\mu r - \frac{r_0^2 r_\mu}{r}\right)\cos(\varphi - \varphi_\mu)$
$+ \frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2 r_\mu}{r} - r_\mu r\right)\cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)$

III : $W_0 + \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\{\cos 2(\varphi + \psi_1) - \cos 2(\varphi - \psi_1)\}$
$+ \frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2 r_\mu}{r} - r_\mu r\right)\{\cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1) - \cos(\varphi + \varphi_\mu - 2\psi_1)\}$

IV : W_0

Va: $W_0 - \frac{1}{4}[r_0^2 + r_\mu^2 - r_\mu^2 \cos 2(\varphi_\mu + \psi_1)] + \frac{1}{4}\frac{r_0^4}{r^2}\cos 2(\varphi + \psi_1)$
$+ \frac{1}{2}\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi - \varphi_\mu) - \frac{1}{2}\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)$

Vb: $W_0 + \frac{1}{4}(r^2 - r_0^2) - \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\cos 2(\varphi + \psi_1)$
$+ \frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2 r_\mu}{r} - r_\mu r\right)\cos(\varphi - \varphi_\mu)$
$- \frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2 r_\mu}{r} - r_\mu r\right)\cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)$

VIa: $W_0 + \frac{1}{4} r_\mu^2 \{\cos 2(\varphi_\mu + \psi_1) - \cos 2(\varphi_\mu - \psi_1)\}$
$+ \frac{1}{4}\frac{r_0^4}{r^2}\{\cos 2(\varphi + \psi_1) - \cos 2(\varphi - \psi_1)\}$
$+ \frac{1}{2}\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\{\cos(\varphi + \varphi_\mu - 2\psi_1) - \cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)\}$

VIb: $W_0 + \frac{1}{4} r_\mu^2 \{\cos 2(\varphi_\mu + \psi_1) - \cos 2(\varphi_\mu - \psi_1)\}$
$+ \frac{1}{4}\frac{r_0^4}{r^2}\{\cos 2(\varphi + \psi_1) - \cos 2(\varphi - \psi_1)\}$
$+ \frac{1}{2}\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\{\cos(\varphi + \varphi_\mu - 2\psi_1) - \cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)\}$
$+ \frac{1}{4}\{r_\mu^2 + r^2 - 2 r_\mu r \cos(\varphi - \varphi_\mu) - r^2 \cos 2(\varphi + \psi_1)$
$- r_\mu^2 \cos 2(\varphi_\mu + \psi_1) + 2 r_\mu r \cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1)\}$

VIc: $W_0 - \frac{1}{4}\left(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\right)\{\cos 2(\varphi + \psi_1) - \cos 2(\varphi - \psi_1)\}$
$- \frac{1}{2}\left(\frac{r_0^2 r_\mu}{r} - r_\mu r\right)\{\cos(\varphi + \varphi_\mu + 2\psi_1) - \cos(\varphi + \varphi_\mu - 2\psi_1)\}.$

Dabei ist gesetzt

$$W_0 = \frac{1}{4\pi} W_0^*$$

und

$$\begin{aligned}
W_0^* = {} & \Big[\frac{1}{4}\Big(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\Big)\sin 2(\varphi+\psi_1) + \frac{1}{2}\Big(r_\mu r - \frac{r_0^2 r_\mu}{r}\Big)\{\sin(\varphi-\varphi_\mu) \\
& - \sin(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)\}\Big] ln \frac{r_0^2+r^2+2r_0 r\cos(\varphi+\varphi_2)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\varphi-\varphi_3)} \\
& - \Big[\frac{1}{4}\Big(r^2 - \frac{r_0^4}{r^2}\Big)\sin 2(\varphi-\psi_1) + \frac{1}{2}\Big(r_\mu r - \frac{r_0^2 r_\mu}{r}\Big)\{\sin(\varphi-\varphi_\mu) \\
& - \sin(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)\}\Big] ln \frac{r_0^2+r^2+2r_0 r\cos(\varphi+\varphi_2)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\varphi-\varphi_1)} \\
& + \frac{r_0}{r}(r_0^2 - r^2)\{\sin 2\psi_1\cos(\varphi-\varphi_2) + \sin(\varphi+\varphi_3+2\psi_1) \\
& - \sin(\varphi+\varphi_1-2\psi_1)\} \\
& - [r^2\{\cos 2(\varphi+\psi_1) - \cos 2(\varphi-\psi_1)\} + r_\mu^2\{\cos 2(\varphi_\mu+\psi_1) \\
& - \cos 2(\varphi_\mu-\psi_1)\} + 2r_\mu r\{\cos(\varphi+\varphi_\mu-2\psi_1) \\
& - \cos(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)\}]\,\Phi(r_0, r, \varphi, \varphi_2, +\pi) \\
& + \Big[\frac{r_0^4}{r^2}\{\cos 2(\varphi+\psi_1) - \cos 2(\varphi-\psi_1)\} + r_\mu^2\{\cos 2(\varphi_\mu+\psi_1) \\
& - \cos 2(\varphi_\mu-\psi_1)\} + 2\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\{\cos(\varphi+\varphi_\mu-2\psi_1) \\
& - \cos(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)\}\Big]\,\Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_2+\pi) \\
& + [r_0^2 + r_\mu^2 - r_\mu^2\cos 2(\varphi_\mu-\psi_1) - r^2\cos 2(\varphi-\psi_1) \\
& - 2r_\mu r\cos(\varphi-\varphi_\mu) + 2r_\mu r\cos(\varphi+\varphi_\mu-2\psi_1)]\,\Phi(r_0, r, \varphi, -\varphi_1) \\
& - \Big[r_0^2 + r_\mu^2 - r_\mu^2\cos 2(\varphi_\mu-\psi_1) - \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2(\varphi-\psi_1) \\
& - 2\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi-\varphi_\mu) + 2\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi+\varphi_\mu-2\psi_1)\Big]\,\Phi(r, r_0, \varphi, -\varphi_1) \\
& - [r_0^2 + r_\mu^2 - r_\mu^2\cos 2(\varphi_\mu+\psi_1) - r^2\cos 2(\varphi+\psi_1) \\
& - 2r_\mu r\cos(\varphi-\varphi_\mu) + 2r_\mu r\cos(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)]\,\Phi(r_0, r, \varphi, -\varphi_3) \\
& + \Big[r_0^2 + r_\mu^2 - r_\mu^2\cos 2(\varphi_\mu+\psi_1) - \frac{r_0^4}{r^2}\cos 2(\varphi+\psi_1) \\
& - 2\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi-\varphi_\mu) + 2\frac{r_0^2 r_\mu}{r}\cos(\varphi+\varphi_\mu+2\psi_1)\Big]\,\Phi(r, r_0, \varphi, -\varphi_3).
\end{aligned}$$

Φ bedeutet hierin wieder die durch (25) S. 22 eingeführte Abkürzung.

Die vertikale Auslenkung des Membranmittelpunktes ergibt

sich für $r = 0$

$$[w(r,\varphi)]_{r=0} = -\frac{p_0}{8\pi c^2}\Big\{\frac{r_0^2}{2}[2\cos 2\varphi_2 \sin 2\psi_1 + 2(\varphi_3 - \varphi_1) - \sin 2(\varphi_3 + \psi_1) + \sin 2(\varphi_1 - \psi_1)] + r_\mu^2[2(\pi + \varphi_2)\sin 2\varphi_\mu \sin 2\psi_1 + (\varphi_3 - \varphi_1) + \varphi_1 \cos 2(\varphi_\mu - \psi_1) - \varphi_3 \cos 2(\varphi_\mu + \psi_1)] + 2 r_\mu r_0[\sin(\varphi_1 - \varphi_\mu) - \sin(\varphi_3 - \varphi_\mu) - \sin(\varphi_3 - 2\psi_1 + \varphi_\mu) + \sin(\varphi_1 - 2\psi_1 + \varphi_\mu) + 2\cos(\varphi_\mu - \varphi_2)\sin 2\psi_1]\Big\}.$$

Daß die vorstehende Lösung wirklich „die Lösung" des vorgelegten Problems darstellt, daß sie also im besonderen die erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllt, folgt aus zu den schon im konzentrischen Fall angestellten analogen Betrachtungen. Für $r_\mu \to 0$ geht der exzentrische Sektor in den konzentrischen, entsprechend die eine Lösung in die andere über.

3. Kreisplatte.

Mit den gleichen Hifsmitteln, die bei der Behandlung der Membran Anwendung gefunden haben, läßt sich nun auch die Biegung der Platte erledigen. Im Hinblick darauf, daß der Lösungsgang für die Platte in allen Einzelheiten dem bei der Membran ausgeführten entspricht, kann die Darstellung desselben kurz gefaßt werden.

Zur Berechnung steht die Biegung einer Kreisplatte vom Radius r_0 unter dem Einfluß einer Last, die gleichmäßig (p_0 pro Flächeneinheit) über einen konzentrischen Kreissektor vom Öffnungswinkel $2\varphi_0$ verteilt ist (Fig. 5). Die Lösung des Problems $w(r,\varphi)$ muß der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w(r,\varphi) = \frac{p(\varphi)}{N} \tag{39}$$

genügen. Außerdem muß sie die beiden Randbedingungen erfüllen

$$[w(r,\varphi)]_{r=r_0} = 0 \quad , \quad \Big[\frac{\partial w}{\partial r}\Big]_{r=r_0} = 0 \; . \tag{40}$$

Das Störungsglied der Differentialgleichung wird dargestellt durch

$$p(\varphi) = \frac{p_0}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{(\varphi+\varphi_0)z}}{z}\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{(\varphi-\varphi_0)z}}{z}\,dz\right\}. \tag{41}$$

Die inhomogene Gleichung mit $e^{\varphi z}$ als Störungsglied wird gelöst durch

$$(42)\quad u_1(r,\varphi;z) = r^4 \frac{e^{\varphi z}}{z^4+20z^2+64} = r^4 \frac{e^{\varphi z}}{(z+2i)(z-2i)(z+4i)(z-4i)}.$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen (40) wird der Ansatz gemacht

$$(43)\qquad u(r,\varphi;z) = u_0(r,\varphi;z) + u_1(r,\varphi;z)\ ;$$

$u_0(r,\varphi;z)$ bedeutet dabei diejenige Lösung der homogenen Gleichung $\Delta\Delta u = 0$, die die beiden Randbedingungen erfüllt

$$(44)\quad [u_0(r,\varphi;z)]_{r=r_0} = -[u_1(r,\varphi;z)]_{r=r_0}$$
$$= -r_0^4 \frac{e^{\varphi z}}{(z+2i)(z-2i)(z+4i)(z-4i)} = g(\varphi;z)$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -\left[\frac{\partial u_1}{\partial r}\right]_{r=r_0} = -4r_0^3 \frac{e^{\varphi z}}{(z+2i)(z-2i)(z+4i)(z-4i)} = h(\varphi;z).$$

Dieses Randwertproblem löst die Funktion

$$(45)\quad u_0(r,\varphi;z) = -\frac{(r_0^2-r^2)^2}{4\pi r_0}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{h(\alpha;z)\,d\alpha}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha$$
$$+\frac{(r_0^2-r^2)^2}{4\pi r_0^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g(\alpha;z)}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)}\,d\alpha$$
$$+\frac{(r_0^2-r^2)^3}{4\pi r_0^2}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{g(\alpha;z)}{[r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^2}.$$

Mit

$$(46)\qquad w(r,\varphi) = \frac{p_0}{N} W(r,\varphi)$$

ist dann die Lösung des Biegungsproblemes (39), (40), (41) durch

$$(47)\quad W(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{(c)} \frac{e^{\varphi_0 z}}{z}[u_0(r,\varphi;z)+u_1(r,\varphi;z)]\,dz - \int_{(c)} \frac{e^{-\varphi_0 z}}{z}[u_0+u_1]\,dz\right\}$$

gegeben. Die Auswertung von (47) führt auf die komplexen Kurvenintegrale

$$(48)\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{(c)} \frac{e^{(\varphi\pm\varphi_0)z}}{z(z+2i)(z-2i)(z+4i)(z-4i)}\,dz$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{64} - \frac{1}{48}\cos 2(\varphi\pm\varphi_0) + \frac{1}{192}\cos 4(\varphi\pm\varphi_0) \\ \qquad\qquad \text{für } \varphi \gtrless \pm\varphi_0 \\ 0 \qquad\qquad \text{„ } \varphi \lessgtr \pm\varphi_0. \end{cases}$$

Ferner treten die Poissonintegrale auf

$$(49)\qquad \int_{-\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos n(\alpha+\varphi_0)}{[r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^{\varkappa}}\,d\alpha\,,$$

$$\int_{+\varphi_0}^{\pi} \frac{\cos n(\alpha-\varphi)}{[r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\alpha-\varphi)]^{\varkappa}}\,d\alpha\,;\quad \begin{pmatrix} n=0,2,4 \\ \varkappa=1,2 \end{pmatrix}$$

Ihre Berechnung erfolgt auf komplexem Wege, wie schon an einem bei der Membran aufgetretenem Beispiele gezeigt wurde. Mit der durch Fig. 6 dargelegten Gebietsunterteilung kann das Ergebnis der Auswertung von (47) angegeben werden. Dieses erfüllt alle erforderlichen Bedingungen und stellt somit die gesuchte Lösung dar. Auf nähere Einzelheiten soll nicht eingegangen werden.

(50) $W =$

in I: $W_0 + \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\cos 2(\varphi+\varphi_0) + \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\cos 4(\varphi+\varphi_0)$

II: $W_0 + \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\{\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 2(\varphi-\varphi_0)\} + \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\{\cos 4(\varphi+\varphi_0) - \cos 4(\varphi-\varphi_0)\}$

III: $W_0 + \frac{1}{64}[r_0^2 - r^2]^2 - \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\cos 2(\varphi-\varphi_0) - \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\cos 4(\varphi-\varphi_0)$

IV: $W_0 + \frac{1}{64}[r_0^2 - r^2]^2 - \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\cos 4(\varphi+\varphi_0)$

V: $W_0 + \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\{\cos 2(\varphi-\varphi_0) - \cos 2(\varphi+\varphi_0)\} + \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\{\cos 4(\varphi-\varphi_0) - \cos 4(\varphi+\varphi_0)\}$

VI: $W_0 + \frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2} + r^4 - 3r_0^4\right]\cos 2(\varphi-\varphi_0) + \frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2} - 3\frac{r_0^8}{r^4} - r^4\right]\cos 4(\varphi-\varphi_0)$

Mit

$$W_0 = \frac{1}{192\pi}\,W_0^*$$

und

$$W_0^* = \frac{1}{4}\left[\left(4\frac{r_0^6}{r^2} - r^4 - 3\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4(\varphi+\varphi_0)\right.$$
$$\left. - 4\left(3r_0^4 - r^4 - 2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2(\varphi+\varphi_0)\right] ln\frac{r_0^2+r^2+2r_0 r\cos\varphi}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\varphi+\varphi_0)}$$
$$-\frac{1}{4}\left[\left(4\frac{r_0^6}{r^2} - r^4 - 3\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4(\varphi-\varphi_0)\right.$$
$$\left. - 4\left(3r_0^4 - r^4 - 2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2(\varphi-\varphi_0)\right] ln\frac{r_0^2+r^2+2r_0 r\cos\varphi}{r_0^2+r^2-2r_0 r\cos(\varphi-\varphi_0)}$$
$$+ r^4\left[4\{\cos 2(\varphi+\varphi_0)-\cos 2(\varphi-\varphi_0)\}-\{\cos 4(\varphi+\varphi_0)-\cos 4(\varphi-\varphi_0)\}\right]$$
$$\Phi(r_0, r, \varphi, \pi) + r_0^4\left[4\left(2\frac{r_0^2}{r^2} - 3\right)\{\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 2(\varphi-\varphi_0)\}\right.$$
$$\left. -\left(3\frac{r_0^4}{r^4} - 4\frac{r_0^2}{r^2}\right)\{\cos 4(\varphi+\varphi_0) - \cos 4(\varphi-\varphi_0)\}\right]\Phi(r, r_0, \varphi, \pi)$$
$$- r^4\left[3\left(\frac{r_0^4}{r^4} - 2\frac{r_0^2}{r^2}\right) + 4\cos 2(\varphi-\varphi_0) - \cos 4(\varphi-\varphi_0)\right]$$
$$\Phi(r_0, r, \varphi, -\varphi_0) - r_0^4\left[3\left(2\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right) + 4\left(2\frac{r_0^2}{r^2} - 3\right)\cos 2(\varphi-\varphi_0)\right.$$
$$\left. + \left(4\frac{r_0^2}{r^2} - 3\frac{r_0^4}{r^4}\right)\cos 4(\varphi-\varphi_0)\right]\Phi(r, r_0, \varphi, -\varphi_0)$$
$$+ r^4\left[3\left(\frac{r_0^4}{r^4} - 2\frac{r_0^2}{r^2}\right) + 4\cos 2(\varphi+\varphi_0) - \cos 4(\varphi+\varphi_0)\right]$$
$$\Phi(r_0, r, \varphi, \varphi_0) + r_0^4\left[3\left(2\frac{r^2}{r_0^2} - 1\right) + 4\left(2\frac{r_0^2}{r^2} - 3\right)\cos 2(\varphi+\varphi_0)\right.$$
$$\left. + \left(4\frac{r_0^2}{r^2} - 3\frac{r_0^4}{r^4}\right)\cos 4(\varphi+\varphi_0)\right]\Phi(r, r_0, \varphi, \varphi_0)$$
$$+\left[\frac{1}{2}\frac{r_0}{r}(r_0^2 - r^2)^2\{\sin\varphi_0 + \sin 4\varphi_0\}\right.$$
$$\left. + 6\frac{r_0}{r}(r_0^2 - r^2)^2\{\sin\varphi_0 + \sin 2\varphi_0\}\right]\cos\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\left(3r_0^4 - r^4 - 2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\{\sin 4\varphi_0 - \sin 2\varphi_0\}\cos 2\varphi$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{r^5}{r_0} + r^3 r_0 - 7\frac{r_0^5}{r} + 5\frac{r_0^7}{r^3}\right)\{\sin 3\varphi_0 + \sin 4\varphi_0\}\cos 3\varphi$$
$$-\frac{1}{2}\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 + 2r_0 r\cos\varphi}\left[\left(\frac{r^5}{r_0} + \frac{r_0^7}{r^3}\right)\sin 4\varphi_0\cos 5\varphi\right.$$
$$+\left(\frac{r^6}{r_0^2} + \frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi_0\cos 4\varphi - 4\left(r_0 r^3 + \frac{r_0^5}{r}\right)\sin 2\varphi_0\cos 3\varphi$$
$$\left. - 4\left(r^4 - \frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi_0\cos 2\varphi\right]$$
$$+\frac{1}{4}\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\varphi-\varphi_0)}\left[\left(\frac{r^5}{r_0} + \frac{r_0^7}{r^3}\right)\sin 5(\varphi-\varphi_0)\right.$$
$$-\left(\frac{r^6}{r_0^2} + \frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4(\varphi-\varphi_0) - 4\left(r_0 r^3 + \frac{r_0^5}{r}\right)\sin 3(\varphi-\varphi_0)$$
$$\left. + 4\left(r^4 + \frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2(\varphi-\varphi_0) + 6r_0^3 r\sin(\varphi-\varphi_0)\right]$$

$$-\frac{1}{4}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos(\varphi+\varphi_0)}\left[\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\sin 5(\varphi+\varphi_0)\right.$$
$$-\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4(\varphi+\varphi_0)-4\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\sin 3(\varphi+\varphi_0)$$
$$\left.+4\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2(\varphi+\varphi_0)+6r_0^3r\sin(\varphi+\varphi_0)\right].$$

Für $r=0$ wird der Biegungspfeil im Plattenmittelpunkt erhalten

$$[w(r,\varphi]_{r=0}=\frac{p_0r_0^4}{32\pi N}\left\{\frac{\varphi_0}{2}-\frac{1}{3}\sin 2\varphi_0+\frac{1}{24}\sin 4\varphi_0\right\}$$

Es sollen noch einige Spezialfälle behandelt werden. Für $\varphi_0\to 0$, d. h. bei verschwindender Last, verschwindet die Durchbiegung. Für $\varphi_0\to\pi$, d. h. bei gleichmäßig belasteter Vollplatte geht die Durchbiegung über in $\frac{p_0}{64N}(r_0^2-r^2)^2$. Für $\varphi_0\to\frac{\pi}{2}$ wird die Hälfte $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$ der Platte gleichmäßig belastet. Die Durchbiegung stellt sich mit (46) in der Form dar

$W=$

unbelastete Hälfte:

$$W_0-\frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2}+r^4-3r_0^4\right]\cos 2\varphi+\frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2}-3\frac{r_0^8}{r^4}-r^4\right]\cos 4\varphi$$

belastete Hälfte:

$$W_0+\frac{1}{64}[r_0^2-r^2]^2+\frac{1}{48}\left[2\frac{r_0^6}{r^2}+r^4-3r_0^4\right]\cos 2\varphi$$
$$-\frac{1}{192}\left[4\frac{r_0^6}{r^2}-3\frac{r_0^8}{r^4}-r^4\right]\cos 4\varphi;$$

dabei ist

$$W_0=\frac{1}{192\pi}W_0^*$$

und

$$W_0^*=\frac{1}{4}\left[\left(4\frac{r_0^6}{r^2}-r^4-3\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi+4\left(3r_0^4-r^4-2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi\right]$$
$$ln\frac{r_0^2+r^2-2r_0r\sin\varphi}{r_0^2+r^2+2r_0r\sin\varphi}$$
$$+r^4\left[3\left(\frac{r_0^4}{r^4}-2\frac{r_0^2}{r^2}\right)-4\cos 2\varphi-\cos 4\varphi\right]\left\{\Phi\left(r_0,r,\varphi,\frac{\pi}{2}\right)\right.$$
$$\left.-\Phi\left(r_0,r,\varphi,-\frac{\pi}{2}\right)\right\}+r_0^4\left[3\left(2\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)-4\left(2\frac{r_0^2}{r^2}-3\right)\cos 2\varphi\right.$$
$$\left.+\left(4\frac{r_0^2}{r^2}-3\frac{r_0^4}{r^4}\right)\cos 4\varphi\right]\left\{\Phi\left(r,r_0,\varphi,\frac{\pi}{2}\right)-\Phi\left(r,r_0,\varphi,-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$
$$+\frac{13}{2}\frac{r_0}{r}(r_0^2-r^2)^2\cos\varphi-\frac{1}{2}\left(\frac{r^5}{r_0}+r_0r^3-7\frac{r_0^5}{r}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\cos 3\varphi$$

$$-\frac{1}{4}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\sin\varphi}\left[\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\cos 5\varphi+\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi\right.$$
$$\left.+4\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\cos 3\varphi+4\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi+6r_0^3r\cos\varphi\right]$$
$$-\frac{1}{4}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2+2r_0r\sin\varphi}\left[\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\cos 5\varphi\quad\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi\right.$$
$$\left.+4\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\cos 3\varphi-4\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi+6r_0^3r\cos\varphi\right].$$

Eine Linienlast vom Betrage P_0 pro Längeneinheit, die gleichmäßig über den Plattenhalbmesser $\varphi=0$ verteilt ist, hat die Durchbiegung zur Folge

$$w(r,\varphi)=\frac{P_0}{N}W(r,\varphi)$$

mit

$W=$

in $-\pi<\varphi<0$

$$W_0-\frac{1}{12r_0}\left[2\frac{r_0^6}{r^2}+r^4-3r_0^4\right]\sin 2\varphi-\frac{1}{24r_0}\left[4\frac{r_0^6}{r^2}-3\frac{r_0^8}{r^4}-r^4\right]\sin 4\varphi$$

in $0<\varphi<+\pi$

$$W_0+\frac{1}{12r_0}\left[2\frac{r_0^6}{r^2}+r^4-3r_0^4\right]\sin 2\varphi+\frac{1}{24r_0}\left[4\frac{r_0^6}{r^2}-3\frac{r_0^8}{r^4}-r^4\right]\sin 4\varphi.$$

Dabei ist

$$W_0=\frac{1}{192r_0\pi}W_0^*$$

und

$$W_0^*=2\left[\left(4\frac{r_0^6}{r^2}-r^4-3\frac{r_0^8}{r^4}\right)\cos 4\varphi\quad 2\left(3r_0^4-r^4-2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right]$$
$$ln\frac{r_0^2+r^2+2r_0r\cos\varphi}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}-\frac{1}{2}\left[\left(4\frac{r_0^6}{r^2}-r^4-3\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi\right.$$
$$\left.-4\left(3r_0^4-r^4-2\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi\right]\frac{r_0r\sin\varphi}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}$$
$$+4r^4\left[2\sin 2\varphi-\sin 4\varphi\right]\Phi(r_0,r,\varphi,\pi)$$
$$+4r_0^4\left[2\left(2\frac{r_0^2}{r^2}-3\right)\sin 2\varphi-\left(3\frac{r_0^4}{r^4}-4\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin 4\varphi\right]\Phi(r,r_0,\varphi,\pi)$$
$$-8r^4\left[2\sin 2\varphi-\sin 4\varphi\right]\Phi(r_0,r,\varphi,0)$$
$$-8r_0^4\left[2\left(2\frac{r_0^2}{r^2}-3\right)\sin 2\varphi-\left(3\frac{r_0^4}{r^4}-4\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin 4\varphi\right]\Phi(r,r_0,\varphi,0)$$
$$-r^4\left[3\left(\frac{r_0^4}{r^4}-2\frac{r_0^2}{r^2}\right)+4\cos 2\varphi-\cos 4\varphi\right]\frac{r_0r\cos\varphi-r_0^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}$$
$$-r_0^4\left[3\left(2\frac{r^2}{r_0^2}-1\right)+4\left(2\frac{r_0^2}{r^2}-3\right)\cos 2\varphi\right.$$
$$\left.+\left(4\frac{r_0^2}{r^2}-3\frac{r_0^4}{r^4}\right)\cos 4\varphi\right]\frac{r_0r\cos\varphi-r^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}$$

$$+\frac{41}{2}\frac{r_0}{r}(r_0^2-r^2)^2\cos\varphi+\frac{1}{r^2}(3r_0^4r^2-r^6-2r_0^6)\cos 2\varphi$$

$$+\frac{7}{2}\frac{1}{r_0r^3}(r^8+r_0^2r^6-7r_0^6r^2+5r_0^8)\cos 3\varphi$$

$$-2\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}\left[\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\cos 5\varphi+\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\cos 4\varphi\right.$$

$$\left.-2\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\cos 3\varphi-2\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\cos 2\varphi\right]$$

$$-\frac{1}{2}\frac{r_0^2-r^2}{r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi}\left[5\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\cos 5\varphi\right.$$

$$-4\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\cos 4\varphi-12\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\cos 3\varphi$$

$$\left.+8\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\cos 2\varphi+6r_0^3r\cos\varphi\right]$$

$$+\frac{r_0r(r_0^2-r^2)\sin\varphi}{[r_0^2+r^2-2r_0r\cos\varphi]^2}\left[\left(\frac{r^5}{r_0}+\frac{r_0^7}{r^3}\right)\sin 5\varphi-4\left(\frac{r^6}{r_0^2}+\frac{r_0^8}{r^4}\right)\sin 4\varphi\right.$$

$$\left.-4\left(r_0r^3+\frac{r_0^5}{r}\right)\sin 3\varphi+4\left(r^4+\frac{r_0^6}{r^2}\right)\sin 2\varphi+6r_0^3r\sin\varphi\right].$$

Der Fall des exzentrischen Kreissektors als konstantes Lastfeld über der eingespannten Platte soll rechnerisch nicht behandelt werden. Von einer gewissen Kompliziertheit der Rechnungen abgesehen, würden sich keine neuen grundsätzlichen Schwierigkeiten darbieten. Die neu auftretenden Poissonschen Integrale wären vom gleichen Typus wie die bereits berechneten und könnten auf dem dargelegten komplexen Wege ausgewertet werden. Die sich ergebende Unterteilung des Plattengebietes würde mit der in Fig. 9 für die Membran getroffenen übereinstimmen. Das zeigt ein Vergleich der drei behandelten Fälle.

Lebenslauf

Geboren am 7. Dezember 1910 als Sohn des Landwirts Theodor Lüddecke in Gnadau besuchte ich das Realgymnasium zu Schönebeck a. E., das ich im Jahre 1929 mit der Reifeprüfung abschloß. Anschließend praktizierte ich ein Jahr als Motorenschlosser in Magdeburg und bezog darauf die staatliche Hochschule für angewandte Technik in Köthen, an der ich fünf Semester Maschinenbau studierte. Durch die funktionentheoretischen Vorlesungen von Herrn Prof. H. Schmidt wurde in mir das Interesse wachgerufen, das mathematische Studium an einer Universität abzuschließen. Ich siedelte zur Universität Leipzig über und hörte dort drei Semester lang die Vorlesungen der Herren Professoren Schmidt, Koebe, van der Waerden, Lichtenstein, Schnee, Heisenberg, Debye, Schiller und Hopmann. Im Sommer 1934 ließ ich mich an der Universität Halle immatrikulieren und nahm im mathematischen Seminar von Herrn Prof. H. W. E. Jung meine von Herrn Prof. H. Schmidt angeregte Dissertation in Angriff. Ich hörte während vier Semester Vorlesungen bei den Herren Professoren und Dozenten Jung, Brandt, Behmann, Grell, Neiß, Hoffmann, Smekal, Schmaltz und Lüddecke. Am 24. Juni 1936 bestand ich die mündliche Doktorprüfung in dem Hauptfach Mathematik und den Nebenfächern Physik und Betriebswirtschaftslehre.

Ich möchte nicht verfehlen, meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. H. W. E. Jung und Herrn Prof. H. Schmidt, auch an dieser Stelle nicht nur für die Anregungen zur vorliegenden Arbeit, sondern für die stete Förderung meiner wissenschaftlichen Ausbildung überhaupt meinen herzlichen Dank auszusprechen.